

به نام خدا

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

ریاضی عمومی ۱

تمرینات سری اول: مجموعه ها و اعداد مختلط

۱. نشان دهید  $\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$  گویا نیست.

۲. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو زیر مجموعه  $\mathbb{R}^n$  باشند. مجموعه  $A + B$  را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

ثابت کنید اگر  $A$  و  $B$  از بالا کراندار باشند،  $A + B$  نیز از بالا کراندار است و کوچکترین کران بالای آن برابر مجموع کوچکترین کران های بالای  $A$  و  $B$  است.

۳. معادله جبری

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

را که در آن  $p_i$  ها اعداد صحیح هستند، در نظر بگیرید. به موارد زیر پاسخ دهید.

(الف) نشان دهید این معادله نمی تواند ریشه گویای ناصحیح داشته باشد.

(ب) نشان دهید اگر  $p_n = 1$ ,

$$1 + p_1 + p_2 + \dots \neq 0$$

و

$$1 - p_1 + p_2 - p_3 + \dots \neq 0,$$

آنگاه معادله نمی تواند ریشه گویا داشته باشد.

(ج) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید  $\sqrt{7}$  گویا نیست.

۴. ثابت کنید اگر  $w$  یک ریشه معادله

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

با  $a_i \in \mathbb{R}$  باشد، آنگاه  $\bar{w}$  نیز ریشه ای از این معادله است.

۵. نابرابری زیر را برای دو عدد مختلط  $z_1$  و  $z_2$  ثابت کنید.

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

۶. ناحیه ای از صفحه را که با نامعادلات زیر توصیف شده، مشخص کنید.

$$|z|^2 - 3|z| + 2 < 0 \quad (\text{د}) \quad \pi \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \quad (\text{ج}) \quad |z - 3 + 4i| \leq 5 \quad (\text{ب}) \quad |z - 2i| \leq 3 \quad (\text{الف})$$

$$|z - 1| \leq 2|z + 1| \quad (\text{ه}).$$

۷. اعداد مختلط زیر را بصورت متعارفی بنویسید.

$$\left(\frac{\lambda + i\mu}{\lambda - i\mu}\right)^3 - \left(\frac{\lambda - i\mu}{\lambda + i\mu}\right)^3 \quad (\text{ج}) \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^4 \quad (\text{ب}) \quad \frac{(2\bar{z} + 5)(\sqrt{2} - i)}{2z + 5} \quad (\text{الف})$$

۸. الف) نشان دهید مجموعه نقاط  $z$  روی دایره به شعاع  $R$  و مرکز  $c$  در رابطه  $|z - c| = R$  صدق می کنند و برعکس.

ب) اگر مختصات قطبی مرکز دایره ای  $(r_0, \theta_0)$  و شعاع دایره برابر  $R$  باشد، آنگاه مختصات قطبی دایره مفروض بصورت زیر است.

$$r^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 - R^2 = 0.$$

۹. نشان دهید دو خطی که نقاط  $z_1 = a$  و  $z_2 = b$  و همچنین نقاط  $z_3 = c$  و  $z_4 = d$  را در صفحه مختلط به یکدیگر متصل می کنند بر هم عمودند اگر و تنها اگر

$$\arg\left(\frac{a - b}{c - d}\right) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

۱۰. اگر  $z_1, z_2$  و  $z_3$  سه عدد مختلط متمایز باشند بطوریکه  $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$ ، نشان دهید  $z_k$  ها رئوس یک مثلث متوازی الاضلاع هستند اگر و تنها اگر  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ .

۱۱. معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} z^3 - 3z^2 + 6z - 8 &= 0 \quad (\text{الف}) \\ z^4 - 4iz^3 - 6z^2 + 4iz + 1 &= 0 \quad (\text{ج}) \\ z^6 + 3z^3 + 1 &= 0 \quad (\text{ب}) \\ z^n + z^{n-1} + \dots + z + 1 &= 0 \quad (\text{د}) \end{aligned}$$

۱۲. فرض کنید  $z_1$  و  $z_2$  دو عدد مختلط است. ثابت کنید:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

و نتیجه بگیرید که اگر  $z_1, z_2 \neq 0$  و  $\theta$  زاویه میان نیم خط های واصل از  $0$  به  $z_1$  و  $z_2$  باشد، آنگاه

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)}{|z_1||z_2|}.$$

۱۳. نشان دهید اگر  $w_i$  ها ریشه های معادله  $w^n = 1$  باشند، آنگاه  $\sum_{i=0}^{n-1} w_i = 0$ .

۱۴. تساوی زیر را ثابت کنید.

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

موفق باشید.